



eduresourcza.com

NASIENRIGLYNE

EKSAMEN		NASIONALE SENIOR SERTIFIKAAT	
GRAAD		12	
DATUM		NOVEMBER 2024	
VAK		WISKUNDE	
VRAESTEL		2	
PUNTETOTAAL		150	
TYDSDUUR (URE)		3	
AANTAL BLADSYE		27	



SOUTH AFRICAN COMPREHENSIVE ASSESSMENT INSTITUTE
SUID-AFRIKAANSE KOMPREENSIEWE ASSESSERINGSINSTITUUT

VRAAG 1

Pamela het die hoeveelheid data in MB aangeteken wat sy op elk van die eerste 15 dae in Mei gebruik het opgeteken. Die inligting word in die tabel hieronder getoon:

26	13	3	18	12	34	24	58	16	10	15	69	20	17	40
----	----	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

1.1	Bereken die gemiddeld vir die datastel.	(1)
	$\bar{x} = \frac{375}{15} = 25$	✓ Antwoord (1)
1.2	Bepaal die standaardafwyking vir die datastel.	(1)
	$\sigma = 17,65$	✓ Antwoord (1)
1.3	Bepaal die aantal dae waarvoor die data wat gebruik is groter was as een standaardafwyking bo die gemiddeld.	(2)
	$\text{Boonste waarde} = \bar{x} + \sigma$ $\text{Boonste waarde} = 25 + 17,65$ $\text{Boonste waarde} = 42,65$ $\therefore 2$ waardes bo een standaardafwyking.	✓ 42,65 ✓ 2 waardes (2)
		[4]

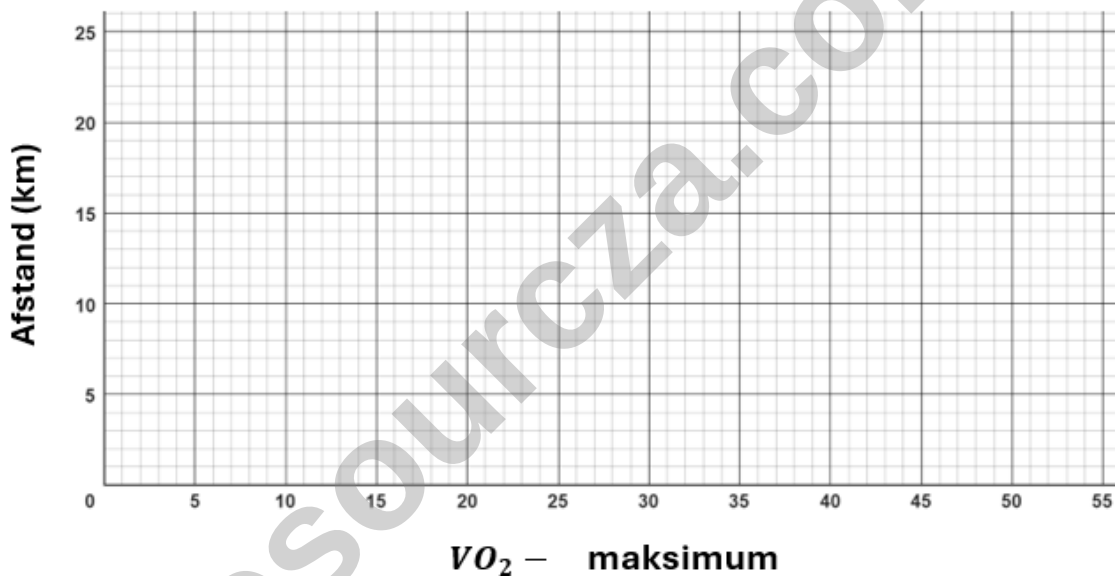
VRAAG 2

'n Atleet se vermoë om suurstof in te neem en te gebruik staan bekend as hul VO_2 -maksimum. Die onderstaande tabel toon elf atlete se VO_2 maksimum en die afstand wat hulle in 'n uur gehardloop het.

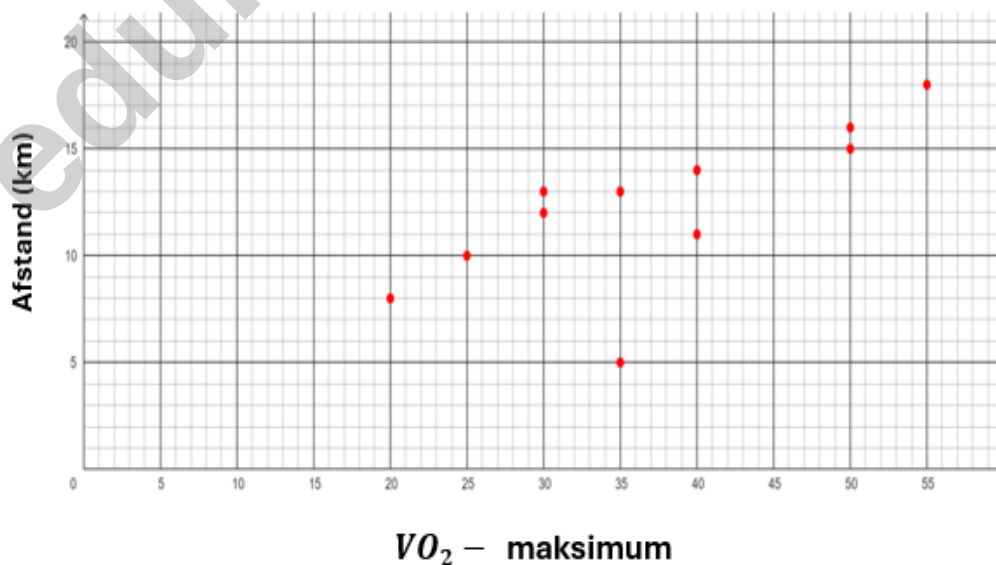
VO_2 -max	50	55	20	30	40	25	30	50	40	35	35
Distance (km)	15	18	8	13	14	10	12	16	11	13	5

2.1 Teken 'n verspreidingsdiagram van die bogenoemde data op die onderstaande assestelsel. (2)

Verspreidingsdiagram.



Verspreidingsdiagram.



✓ (20;8)
en
(55;18)
✓ ander
punte
korrek
geplot

(2)

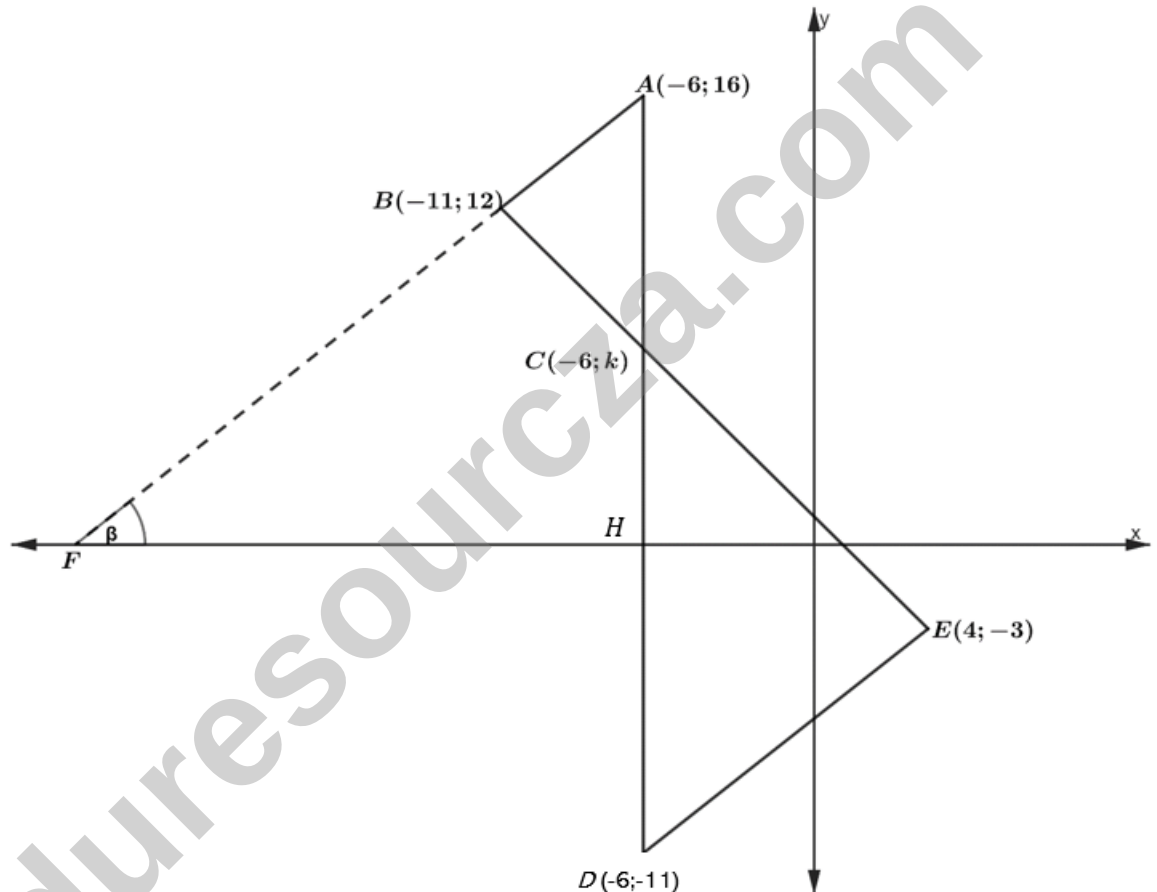


2.2	Bereken die vergelyking van die kleinste kwadratiese regressielyn van die data.	(3)
	$A = 3,15$ $B = 0,24$ $y = 0,24x + 3,15$	✓ $A = 3,15$ ✓ $B = 0,24$ ✓ Korr. vergelyking (3)
2.3	Teken die kleinste kwadratiese regressielyn op die verspreidingsdiagram wat in VRAAG 2.1 hierbo geteken is.	(3)
	Verspreingsdiagram. VO₂ – maksimum	✓ y-afsnit ✓ EEN waarde (37,27 ; 12,27) OF (20;8) OF (55;16,4) ✓ Korrekte lyn (3)
2.4	Identifiseer of daar enige uitskieters in die data is. Verskaf 'n rede vir jou antwoord.	(2)
	(35;5) is 'n uitskieter. Hierdie waarde wyk af van al die ander data in hierdie stel.	✓ (35;5) ✓ Rede
2.5	Voorspel die VO ₂ maksimum van 'n atleet wat 19 km gehardloop het.	(2)
	$19 = 0,24x + 3,15$ $x = 66,04$	✓ Vervang $y = 19$ ✓ $x = 66,04$ (2)
2.6	Bepaal die korrelasiekoëffisiënt van die data en lewer kommentaar op die korrelasie.	(2)
	$r = 0,73$ Matige positiewe korrelasie	✓ $r = 0,73$ ✓ Matige positiewe (2)
		[14]

VRAAG 3

In die onderstaande diagram:

- $A(-6; 16); B(-11; 12); D(-6; -11)$ en $E(4; -3)$ word gegee.
- AD sny BE by punt $C(-6; k)$.
- AB verleng ontmoet die x -as by F .
- $\widehat{HFA} = \beta$.
- AD sny die x -as by H .
- ACD en BCE is reguit lyne.



3.1	Toon aan dat $k = 7$ is.	(4)
	$m_{BE} = \frac{12 - (-3)}{-11 - 4}$ $m_{BE} = -1$ $\therefore m_{BC} = \frac{12 - k}{-11 - (-6)}$ $m_{BC} = -1$ $12 - k = 5$ $k = 7$	✓ Vervang in korr. formule ✓ $m_{BE} = -1$ ✓ Vervang (-6;k) ✓ Vereenvoudig



	OF $m_{BE} = \frac{12 - (-3)}{-11 - 4}$ $m_{BE} = -1$ $y = mx + c$ $-3 = -(4) + c$ $c = 1$ $\therefore y = -x + 1$ or $y - y_1 = m(x - x_1)$ $(y - (-3)) = -(x - 4)$ $y + 3 = -x + 4$ $y = -x + 1$ $C(-6; k):$ $k = -(-6) + 1 = 7$ OF $DE = \sqrt{(4 - (-6))^2 + (-3 - (-11))^2}$ $DE = \sqrt{164}$ $DE = 2\sqrt{41} \text{ eenhede}$ $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{ED} \dots \text{lyn een sy van } \triangle$ $\frac{16 - k}{k - (-11)} = \frac{\sqrt{41}}{2\sqrt{41}} = \frac{1}{2}$ $2(16 - k) = k + 11$ $3k = 21$ $k = 7$	OF ✓ Vervang in korr. formule ✓ $m_{BC} = -1$ ✓ $y = -x + 1$ ✓ Vervang $(-6; k)$ OF ✓ Vervang in korr. formule ✓ $CE = 2\sqrt{41}$ ✓ $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{ED}$ ✓ $\frac{16 - k}{k - (-11)} = \frac{\sqrt{41}}{2\sqrt{41}}$
3.2	Bereken die lengte van BC.	(2)
	$BC^2 = (12 - 7)^2 + (-11 + 6)^2$ $BC = 5\sqrt{2}$	✓ Vervang in korr. formule ✓ Antwoord



3.3	Toon aan dat C NIE die middelpunt van BE is nie.	(2)
	$\text{Middelpunt } BE = \left(\frac{-11 + 4}{2} ; \frac{12 - 3}{2} \right)$ $\text{Middelpunt } BE = \left(-\frac{7}{2} ; \frac{9}{2} \right)$ C = (-6;7), ∴ is dit NIE die middelpunt van BE nie	✓ Vervang in korr. formule $\checkmark \left(-\frac{7}{2} ; \frac{9}{2} \right)$ (2)
3.4	Bereken die grootte van $\hat{B}AD$.	(5)
	$m_{AB} = \frac{16 - 12}{-6 + 11} = \frac{4}{5}$ $\tan \hat{B}FX = m_{AB} = \frac{4}{5}$ $\hat{B}FX = \tan^{-1} \left(\frac{4}{5} \right) = 38,6598 \dots \approx 38,66^\circ$ $\beta = 180^\circ - 38,66^\circ = 141,34^\circ$ $\hat{B}AD = 141,34 - 90^\circ \dots \dots \text{ buite } \angle \text{ van } \Delta = \text{som teenoorst binne } \angle \text{'e}$ $\hat{B}AD = 51,34^\circ$ OF $AD \perp x - \text{axis } m_{AD} \text{ is ongedefinieerd}$ $\therefore \hat{F}HA = 90^\circ$ $m_{AB} = \frac{4}{5} \text{ vanaf 3.2}$ $\therefore \hat{A}FH = 38,66^\circ$ $\therefore \hat{B}AD = 180^\circ - 90^\circ - 38,66^\circ = 51,34^\circ$	$\checkmark m_{AB}$ $\checkmark \tan \hat{B}FX = \frac{4}{5}$ $\checkmark \hat{B}FX = 38,66^\circ$ $\checkmark \alpha = 141,34^\circ$ $\checkmark \hat{B}AD = 51,34^\circ$ OF $\checkmark \hat{F}HA = 90^\circ$ $\checkmark m_{AB} = \frac{4}{5}$ $\checkmark \hat{A}FH = 38,66^\circ$ $\checkmark 180^\circ - 90^\circ - 38,66^\circ$ $\checkmark \hat{B}AD = 51,34^\circ$

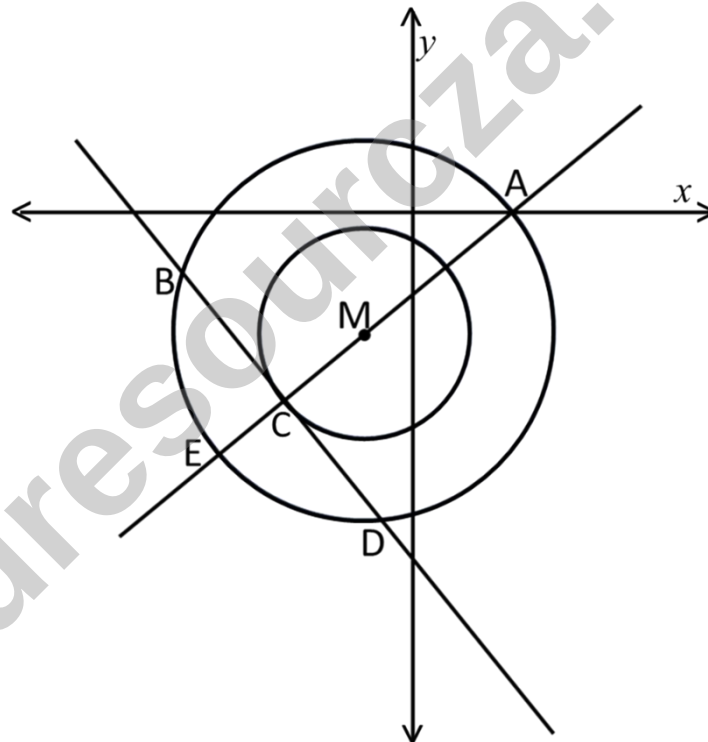


3.5	Bereken die numeriese waarde van $\frac{\text{Area of } \triangle ABC}{\text{Area of } \triangle DEC}$	(5)
	$AC = 16 - 7 = 9$ eenhede (k-waarde vanaf 3.1) $DC = 7 + 11 = 18$ eenhede $BC = 5\sqrt{2}$ $EC = \sqrt{(-6 - 4)^2 + (7 + 3)^2} = 10\sqrt{2}$ $\hat{BCA} = \hat{ECD} \dots$ regoorstaande hoeke $\frac{\text{Area } \triangle ABC}{\text{Area } \triangle DEC} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AC \times \sin \hat{BCA}}{\frac{1}{2} \times DC \times CE \times \sin \hat{DCE}}$ $\frac{\text{Area } \triangle ABC}{\text{Area } \triangle DEC} = \frac{(5\sqrt{2})(9)}{(18)(10\sqrt{2})}$ $\frac{\text{Area } \triangle ABC}{\text{Area } \triangle DEC} = \frac{1}{4}$	$\checkmark DC = 18$ $\checkmark$ $EC = 10\sqrt{2}$ $\checkmark \hat{BCA} = \hat{ECD}$ $\checkmark$ Oppv reël vervang. $\checkmark$ Antwoord
		[18]

VRAAG 4

In die onderstaande diagram:

- Die klein sirkel (P_1) en die groot sirkel (P_2) het dieselfde middelpunt M.
- A en E is punte op sirkel P_2 .
- EM sny sirkel P_1 by punt C.
- Die raaklyn BD aan sirkel P_1 sny sirkel P_2 by B en D.
- Die vergelyking van sirkel P_1 word gegee deur $x^2 + 2x + y^2 + 10y + 6 = 0$.
- Die vergelyking van lyn EM is $y = x - 4$.



4.1	Gee die koördinate van middelpunt M.	(3)
	$(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = -6 + 1 + 25$ $(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 20$ $M(-1; -5)$	$\checkmark (x + 1)^2$ $\checkmark (y + 5)^2$ $\checkmark (-1; -5)$
4.2	Bepaal die radius van sirkel P_1 .	(1)
	$r = \sqrt{20}$ (aanvaar $2\sqrt{5}$ or 4,47)	$\checkmark$ Antwoord

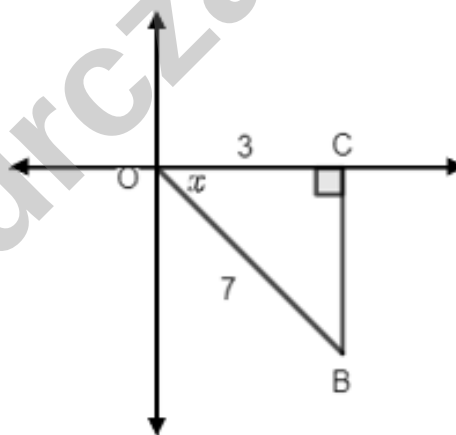


4.3	C is die punt waar lyn EM en sirkel P ₁ sny. Bepaal die koördinate van C, korrek tot twee desimale plekke. Toon alle bewerkings.	(6)
	Gegee: $y = x - 4$ $(x + 1)^2 + (x - 4 + 5)^2 = 20$ $x^2 + 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 = 20$ $2x^2 + 4x + 2 - 20 = 0$ $2x^2 + 4x - 18 = 0$ $x^2 + 2x - 9 = 0$ $x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)}$ $x = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2}$ $x = -1 + \sqrt{10} \quad \text{of} \quad x = -1 - \sqrt{10}$ $x = 2,16 \quad \text{of} \quad x = -4,16$ n.v.t. $y = (-4,16) - 4$ $y = -8,16$ C(-4,16 ; -8,16)	✓ Vervanging $\checkmark 2x^2 + 4x - 18 = 0$ ✓ vervang in kwadratiese vergelyk. $\checkmark x = -4,16$ $\checkmark \text{n.v.t. } x = 2,16$ ✓ C(-4,16 ; -8,16) (y - waarde)
4.4	Bepaal die gradiënt van die raaklyn aan sirkel P ₂ by punt E.	(3)
	$M\hat{C}D = 90^\circ \dots \text{radius} \perp \text{tangent}$ $m_{ME} = 1$ (gegee) $\therefore m_{\text{tangent}} = -1 \dots \text{radius} \perp \text{tangent}$ OF $m_{ME} = \frac{-8,16 + 5}{-4,16 + 1}$ $m_{ME} = 1$ $m_{BC} \times m_{ME} = -1 \dots \text{radius} \perp \text{tangent}$ $\therefore m_{\text{tangent}} = -1$	✓ $M\hat{C}D = 90^\circ$ ✓ $m_{ME} = 1$ ✓ Antwoord OF ✓ $m_{ME} = 1$ ✓ $m_{BC} \times m_{ME} = -1$ ✓ Antwoord
4.5	Gegewe die feit dat $CD = 5\sqrt{2}$, bepaal MD, die radius van sirkel P ₂ .	(4)
	$MD^2 = CD^2 + MC^2 \dots \text{Pythagoras}$ $MD^2 = (5\sqrt{2})^2 + (\sqrt{20})^2$ $MD = \sqrt{70} \text{ eenhede}$	✓ S $\checkmark (5\sqrt{2})^2$ $\checkmark (\sqrt{20})^2$ $\checkmark MD = \sqrt{70}$ Aanvaar 8,37 eenhede

4.6	Skryf die vergelyking van P_2 neer in die vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.	(1)
	$(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 70$	✓ Antwoord
4.7	Bewys dat punt $q(\sqrt{5}; 0)$ binne sirkel P_2 lê. Toon al jou bewerkings.	(4)
	Afstand vanaf q na middelpunt: $= \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2 + (0 + 5)^2}$ $= 5,96$ $\sqrt{70} = 8,37$ $5,96 < 8,37 (\sqrt{70})$ $\therefore q(\sqrt{5}; 0) \text{ lê binne sirkel } C_2.$	✓ korr. vervanging ✓ 5,96 ✓ 8,37 ✓ $5,96 < 8,37 (\sqrt{70})$
		[22]

VRAAG 5

5.1	Indien $7 \cos x = 3$ en $x \in [90^\circ; 360^\circ]$, bereken die waarde van $3 \cos 2x$ sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.	(4)
	$\cos x = \frac{3}{7}$ $3 \cos 2x = 3(2 \cos^2 x - 1)$ $= 3 \left[2 \left(\frac{3}{7} \right)^2 - 1 \right]$ $= -\frac{93}{49}$ OF $\cos x = \frac{3}{7}$ $y = \sqrt{(7)^2 - (3)^2}$ $y = 2\sqrt{10}$ $3 \cos 2x = 3(1 - 2 \sin^2 x)$ $= 3 \left[1 - 2 \left(\frac{2\sqrt{10}}{7} \right)^2 \right]$ $= -\frac{93}{49}$ OF $\cos x = \frac{3}{7}$ $3 \cos 2x = 3(\cos^2 x - \sin^2 x)$ $= 3 \left[\left(\frac{3}{7} \right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{10}}{7} \right)^2 \right]$ $= -\frac{93}{49}$	✓ $\cos x = \frac{3}{7}$ ✓ Identiteit ✓ Vervang korr. verhouding ✓ Antwoord OF ✓ $\cos x = \frac{3}{7}$ ✓ Identiteit ✓ Vervang korr. verhouding ✓ Antwoord OF ✓ $\cos x = \frac{3}{7}$ ✓ Identiteit ✓ Vervang korr. verhouding ✓ Antwoord (4)





5.2	Bewys dat $2 \sin x - \cos^2 x$ geskryf kan word as $(\sin x + 1)^2 - 2$.	(3)
	$(\sin x + 1)^2 - 2$ $= \sin^2 x + 2 \sin x + 1 - 2$ $= 2 \sin x - 1 + \sin^2 x$ $= 2 \sin x - (1 - \sin^2 x)$ $= 2 \sin x - \cos^2 x$ OF $2 \sin x - \cos^2 x$ $= 2 \sin x - (1 - \sin^2 x)$ $= 2 \sin x - 1 + \sin^2 x$ $= \sin^2 x + 2 \sin x - 1$ $= \sin^2 x + 2 \sin x + 1 - 2$ $= (\sin x + 1)^2 - 2$	✓ kwadratiese drieterm ✓ Vereenvoudig ✓ Identiteit OF ✓ Identiteit ✓ kwadratiese drieterm ✓(+1)(-2)

5.3.1	Bepaal die algemene oplossing vir die waarde(s) van x indien: $5 \sin 2x - \cos 2x = 0$	(5)
	$\frac{5 \sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\cos 2x}{\cos 2x} = 0$ $5 \tan 2x - 1 = 0$ $\tan 2x = \frac{1}{5}$ $VH = 11,31^\circ$ $2x = 11,31^\circ + k \cdot 180^\circ; k \in \mathbb{Z}$ $x = 5,66^\circ + k \cdot 90^\circ; k \in \mathbb{Z}$ $\therefore x = 5,66^\circ + k \cdot 90^\circ; k \in \mathbb{Z}$ (Aanvaar 5,65)	✓ $\div \cos 2x$ ✓ $\tan 2x = \frac{1}{5}$ ✓ $VH = 11,31^\circ$ ✓ 1 punt vir $x = 5,66^\circ +$ $k \cdot 90^\circ$ ✓ 1 punt vir $k \in \mathbb{Z}$

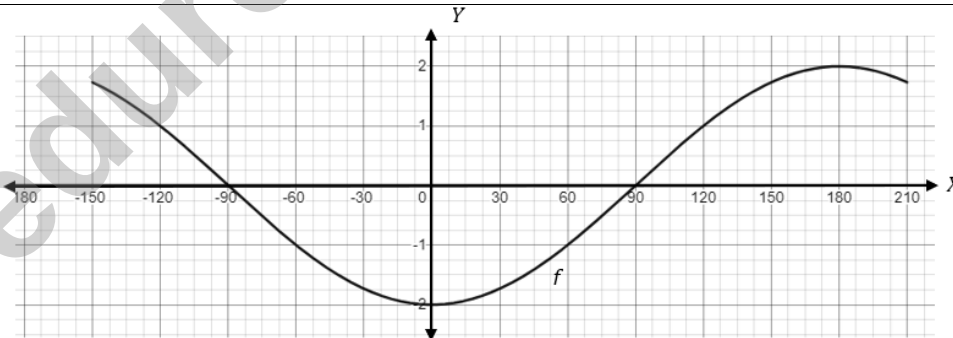


5.3.2	Vir watter waarde(s) van x sal $5 \tan 2x - 1 = 0$ en $x \in [-180^\circ; 180^\circ]$ ongedefinieerd wees?	(2)
	$x \in \{-135^\circ; -45^\circ; 45^\circ; 135^\circ\}$	✓ 1 punt TWEЕ ✓ 1 punt ANDER TWEЕ waardes
5.4	Vereenvoudig tot 'n enkele trigonometriese funksie, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar : $-1 + \cos(180^\circ - \theta) \cdot \sin(\theta - 90^\circ)$	(3)
	$-1 + \cos(180^\circ - \theta) \cdot \sin(\theta - 90^\circ)$ $= -1 + (-\cos \theta) \cdot (-\cos \theta)$ $= -1 + \cos^2 \theta$ $= -(1 - \cos^2 \theta)$ $= -\sin^2 \theta$	✓ $-\cos \theta$ ✓ $-\cos \theta$ ✓ Antwoord
5.5	Indien $\cos 44^\circ = \sqrt{p}$, bepaal $\sin^2 68^\circ$ in terme van p , sonder die gebruik van 'n sakrekenaar .	(4)
	$\cos(2(22^\circ)) = \sqrt{p}$ $2 \cos^2 22^\circ - 1 = \sqrt{p}$ $2 \cos^2 (90^\circ - 68^\circ) - 1 = \sqrt{p}$ $2 \sin^2 68^\circ - 1 = \sqrt{p}$ $\sin^2 68^\circ = \frac{\sqrt{p} + 1}{2}$ OF $\cos 136^\circ = 1 - 2 \sin^2 68^\circ$ $2 \sin^2 68^\circ = 1 - \cos 136^\circ$ $= 1 + \cos 44^\circ$ $\sin^2 68^\circ = \frac{\sqrt{p} + 1}{2}$	✓ $\cos(2(22^\circ))$ ✓ Identiteit ✓ Reduksie (90-68) ✓ Antwoord OF ✓ $1 - 2 \sin^2 68^\circ$ ✓ Vereenvoudig ✓ Skerphoek ✓ Antwoord



5.6	Bewys die volgende identiteit:	
	$\frac{\sin 7x \cdot \cos 5x - \cos 7x \cdot \sin 5x}{\tan 2x} - 1 = -2 \sin^2 x$	(4)
	$LK = \frac{\sin(7x - 5x)}{\tan 2x} - 1$ $LK = \frac{\sin 2x}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}} - 1$ $LK = \sin 2x \times \frac{\cos 2x}{\sin 2x} - 1$ $LK = \cos 2x - 1$ $LK = 1 - 2 \sin^2 x - 1$ $LK = -2 \sin^2 x = RK$	✓ $\sin(7x - 5x)$ ✓ $\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$ ✓ $\cos 2x - 1$ ✓ $1 - 2 \sin^2 x$
5.7	Gegee: $\tan x = \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \dots}}}}$ Bewys dat: $\sin x = \sqrt{\cos x(\cos^2 x + \sin x)}$	(5)
	$(\tan x)^2 = \left(\sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \dots}}}} \right)^2$ $\tan^2 x = \cos x + \tan x$ $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \cos x + \frac{\sin x}{\cos x}$ $\sin^2 x = \cos^3 x + \sin x \cos x$ $\sin^2 x = \cos x(\cos^2 x + \sin x)$ $\sin x = \sqrt{\cos x(\cos^2 x + \sin x)}$	✓ kwadreer beide kante ✓ Vervang $\tan x$ ✓ tan identiteit ✓ KGV ✓ $\sin^2 x = \dots$
		[30]

VRAAG 6

6.1	Bereken die waarde(s) van x sonder die gebruik van 'n sakrekenaar , indien $\sin(x - 30^\circ) + 2 \cos x = 0$; $x \in [-150^\circ; 210^\circ]$ en $\cos x \neq 0$.	(6)
	$\sin x \cdot \cos 30^\circ - \cos x \cdot \sin 30^\circ + 2 \cos x = 0$ $\sin x \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \cos x \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cos x = 0$ $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{3}{2} \cos x = 0$ $\frac{\sqrt{3} \sin x}{2 \cos x} + \frac{3 \cos x}{2 \cos x} = \frac{0}{\cos x}$ $\frac{\sqrt{3}}{2} \tan x = -\frac{3}{2}$ $\tan x = -\frac{3}{\sqrt{3}}$ $VH = 60^\circ$ $x = 180^\circ - 60^\circ + k \cdot 180^\circ; k \in \mathbb{Z} \quad \text{OF} \quad x = -60^\circ + k \cdot 180^\circ; k \in \mathbb{Z}$ $x \in \{-60^\circ; 120^\circ\}$	✓ saamgestel de id. ✓ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓ $\frac{1}{2}$ ✓ $\div \cos x$ ✓ $\tan x = -\frac{3}{\sqrt{3}}$ ✓ -60° EN 120°
6.2	Die onderstaande diagram toon die grafiek van $f(x) = -2 \cos x$, waar $x \in [-150^\circ; 210^\circ]$.	
		

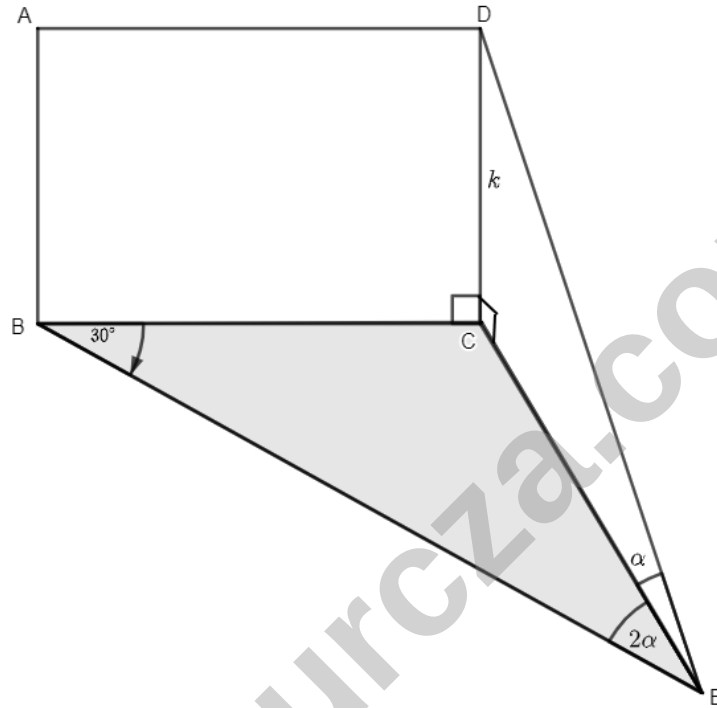


6.2.1	Skets die grafiek van $g(x) = \sin(x - 30^\circ)$ op dieselfde assestelsel hierbo geggee. Toon duidelik alle afsnitte met die asse sowel as die draaipunte.	(4)
		✓ vorm ✓ y- afsnit ✓ Alle x- afsnitte ✓ D/P (-60;-1) en (120;1)
6.2.2	Skryf die amplitude van f neer .	(1)
	Amplitude = 2	✓ Antwoord
6.3	Gebruik jou grafieke om die waarde(s) van x , in the interval $x \in [-150^\circ; 210^\circ]$ sodanig dat:	
6.3.1	$g(x) - f(x) = 0$.	(2)
	By -60° , $g(x) - f(x) = -1 - (-1) = 0$ By 120° , $g(x) - f(x) = 1 - 1 = 0$ $x \in \{-60^\circ; 120^\circ\}$ OF $x = -60^\circ$ or $x = 120^\circ$	✓ -60° ✓ 120°
6.3.2	Dui, met behulp van die simbole A en B, jou antwoord op VRAAG 6.3.1 op die grafiek geteken in VRAAG 6.2.1 aan.	(1)
		✓ Antwoord
		[14]

VRAAG 7

In die diagram lê B, C en E in dieselfde horisontale vlak. ABCD is 'n reghoekige kartonstuk en CDE is 'n driehoekige kartonstuk met 'n regte hoek by C, en $DC = k$. Die kartonstukke word loodreg op die horisontale vlak geplaas soos in die diagram getoon.

Die hoogtehoek van E na D is α . $\widehat{CEB} = 2\alpha$ en $\widehat{EBC} = 30^\circ$.



7.1	Skryf CE in terme van k en α .	(2)
	$\frac{k}{CE} = \tan \alpha$ $CE = \frac{k}{\tan \alpha}$ OF $\frac{CE}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{k}{\sin \alpha}$ $CE = \frac{k \cos \alpha}{\sin \alpha}$	✓ tan verhouding ✓ Antwoord OF ✓ sin rule ✓ Antwoord



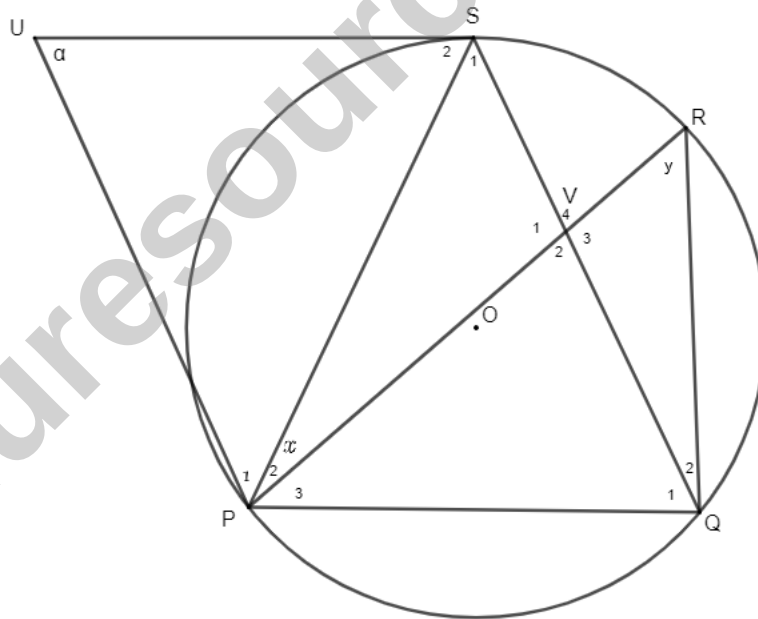
7.2	Bewys dat $BC = 4k \cos^2 \alpha$	(4)
	$\frac{BC}{\sin 2\alpha} = \frac{CE}{\sin 30^\circ}$ $BC = \frac{\frac{k}{\tan \alpha} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\frac{1}{2}}$ $BC = \frac{4k \cdot \sin \alpha \cos \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$ $BC = 4k \cos^2 \alpha$	✓ Sin reël ✓ dubbelhoek identiteit ✓ $\frac{1}{2}$ ✓ $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

7.3	Toon aan dat die oppervlakte van $\triangle BCE$ gelyk is aan :	(3)
	$\frac{2k^2 \cos^3 \alpha \cdot \sin(30^\circ + 2\alpha)}{\sin \alpha}$	
	$Oppv \triangle BCE = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot EC \cdot \sin(180^\circ - (30^\circ + 2\alpha))$ $Oppv \triangle BCE = \frac{1}{2} \cdot (4k \cos^2 \alpha) \left(\frac{k}{\tan \alpha} \right) (\sin(30^\circ + 2\alpha))$ $Oppv \triangle BCE = \frac{2k^2 \cos^2 \alpha \cdot \sin(30^\circ + 2\alpha)}{\tan \alpha}$ $Oppv \triangle BCE = \frac{2k^2 \cos^2 \alpha \cdot \sin(30^\circ + 2\alpha)}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$ $Oppv \triangle BCE = \frac{2k^2 \cos^2 \alpha \cdot \sin(30^\circ + 2\alpha)}{1} \times \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ $Oppv \triangle BCE = \frac{2k^2 \cos^3 \alpha \cdot \sin(30^\circ + 2\alpha)}{\sin \alpha}$	✓ Opp reël ✓ Vereenvoudig ✓ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
		[9]

VRAAG 8

In die diagram:

- O is die middelpunt van die sirkel.
- Die sirkel gaan deur P, Q, R, en S.
- SQ en PR sny in V.
- SU is 'n raaklyn aan die sirkel by S.
- UP word getrek.
- $\hat{U} = \alpha$.
- $\hat{R} = y$.
- $\hat{P}_2 = x$.
- $\alpha = x + y$.



8.1	Gee, met 'n rede, die grootte van:	(2)
8.1.1	$\hat{Q}_2$	
	$\hat{Q}_2 = x \dots \angle$ 'e in dieselfde sirkelsegment	✓ S ✓ R



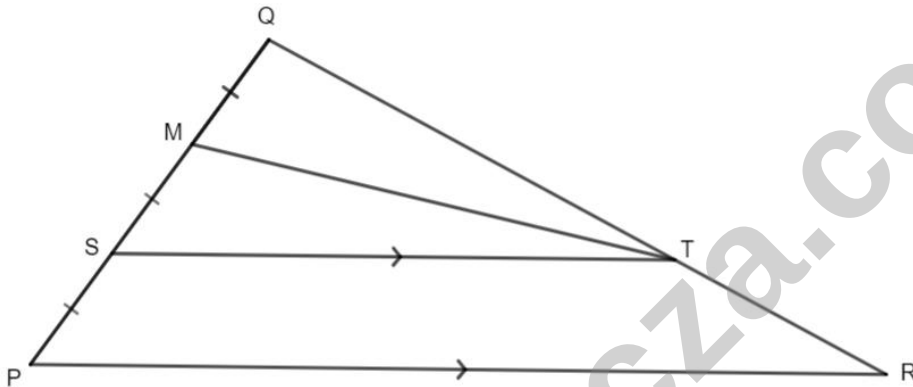
8.1.2	$\hat{S}_1$	(1)
	$\hat{S}_1 = y \dots \angle$ 'e in dieselfde sirkelsegment	✓ S & R
8.2	Bewys dat VSUP 'n koordevierhoek is.	(3)
	$\hat{V}_2 = x + y \dots$ Buite $\angle \triangle SPV =$ som teenoorst binne $\angle$ 'e $\hat{U} = \alpha = x + y \dots$ gegee $\therefore \hat{V}_2 = \hat{U}$ $\therefore$ VSUP is KVVH $\dots$ Omgekeerde buite $\angle =$ teenoorst binne $\angle$ OF $\hat{V}_2 = x + y \dots$ Buite $\angle \triangle SPV =$ som teenoorst binne $\angle$ 'e $\hat{V}_1 = 180^\circ - (x + y) \dots \angle$ 'e op reguit lyn $\hat{V}_1 + \hat{V}_2 = 180^\circ - (x + y) + (x + y)$ $\hat{V}_1 + \hat{V}_2 = 180^\circ$ $\therefore$ VSUP is KVVH $\dots$ Omgekeerde teenoorst binne $\angle$ 'e supplementêr	✓ S & R ✓ S ✓ R OF ✓ S & R ✓ S ✓ R
8.3	Indien $PQ = QR$, bewys dat PQ 'n raaklyn aan die sirkel deur V, S, U en P is.	(3)
	$\hat{P}_3 = y \dots \angle$ 'e teenoor = sye $\therefore \hat{S}_1 = \hat{P}_3 = y$ PQ is 'n raaklyn $\dots$ omgekeerde raaklyn-koord stelling	✓ S & R ✓ S ✓ R
		[9]



VRAAG 9

In die diagram word $\triangle PQR$ getrek met S en T punte op PQ en QR onderskeidelik.

- M is 'n punt op QS.
- $ST \parallel PR$
- $PS = SM = MQ$



9.1	Stel $SP = k$. Bereken $\frac{TR}{QT}$.	(2)
	$\frac{TR}{QT} = \frac{SP}{QS}$. . . lyn ewewydig aan een sy van $\triangle$ $\frac{TR}{QT} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$	✓ S&R ✓ Antwoord
9.2	Bepaal die numeriese waarde van $\frac{\text{Area of } \triangle QMT}{\text{Area of } \triangle QPR}$.	(4)
	$\frac{\text{Oppv van } \triangle QMT}{\text{Oppv van } \triangle QPR} = \frac{\frac{1}{2} QM \cdot QT \sin Q}{\frac{1}{2} QP \cdot QR \sin Q}$ $\frac{\text{Oppv van } \triangle QMT}{\text{Oppv van } \triangle QPR} = \frac{\frac{1}{2} (k)(2m) \sin Q}{\frac{1}{2} (3k)(3m) \sin Q}$ $\frac{\text{Oppv van } \triangle QMT}{\text{Oppv van } \triangle QPR} = \frac{2}{9}$	✓ Oppv reël ✓ $\frac{1}{2}(k)(2m) \sin Q$ ✓ $\frac{1}{2}(3k)(3m) \sin Q$ ✓ Antwoord

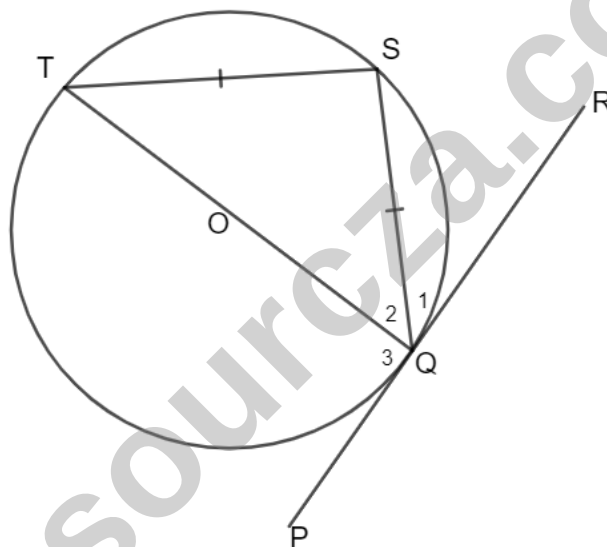


9.3	Indien $ST = 22 \text{ cm}$, bepaal die lengte van PR .	(4)
	In $\triangle PQR$ en $\triangle SQT$: $\hat{Q} = \hat{Q} \dots$ gemene hoek $\hat{QPR} = \hat{QST} \dots$ ooreenkomst. $\angle$'e ; $ST \parallel PR$ $\hat{QRP} = \hat{QTS} \dots$ ooreenkomst. $\angle$'s ; $ST \parallel PR$ OF Som binne.$\angle$'e van $\triangle$ $\triangle PQR \parallel \triangle SQT \dots H;H;H$ $\therefore \frac{PR}{ST} = \frac{PQ}{SQ} \dots \triangle PQR \parallel \triangle SQT$ $\frac{PR}{22} = \frac{3k}{2k}$ $PR = 33 \text{ cm}$	✓ gemene ✓ ooreenst $\angle ST \parallel PR$ ✓ S&R $\parallel$ ✓ Antwoord
		[10]

VRAAG 10

In die diagram:

- TOQ is 'n middellyn van die sirkel met middelpunt O.
- T, S en Q lê op die omtrek van die sirkel.
- PR is 'n raaklyn aan die sirkel by Q.
- TS = SQ.



Bepaal, met redes, die grootte van $\hat{Q}_1$.

(4)

$\hat{Q}_2 = \hat{T} \dots \angle$ 'e teenoor = sye

$\hat{T} = \hat{Q}_1 \dots$ raaklyn-koord

$\therefore \hat{Q}_1 = \hat{Q}_2$

$\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2 = 90^\circ \dots$ radius $\perp$ raaklyn

$\hat{Q}_1 = 45^\circ$

OF

$\hat{S} = 90^\circ \dots \angle$ in semi-sirkel

$\hat{Q}_2 = \hat{T} \dots \angle$'s teenoor = kante

$\hat{Q}_2 = 45^\circ$

$\hat{T} = \hat{Q}_1 \dots$ raaklynkoord

$\therefore \hat{Q}_1 = 45^\circ$

✓ S & R

✓ S & R

✓ S & R

✓ Antwoord

OF

✓ S & R

✓ S & R

✓ S & R

✓ Antwoord

[4]

VRAAG 11

11.1	In die diagram word $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ gegee met $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ en $\hat{C} = \hat{F}$. Gebruik die diagram om te bewys dat $\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{EF}$.	(6)
	Konstruksie: Trek GH sodat $AB=DG$ en $AC=DH$. In $\triangle ABC$ en $\triangle DGH$: $AB = DG$ Konstruksie $AC = DH$ Konstruksie $\hat{A} = \hat{D}$ Gegee $\therefore \triangle ABC \equiv \triangle DGH$ S;H;S In $\triangle DEF$: $D\hat{G}H = \hat{B}$ $\triangle ABC \equiv \triangle DGH$ Maar $\hat{B} = \hat{E}$ Gegee $D\hat{G}H = \hat{E}$ $\therefore GH \parallel EF$ Ooreenkomstige hoeke gelyk $\frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF}$ Lyn ewewydig aan een sy van $\triangle$ Maar $DG = AB$ En $DH = AC$ Konstruksie $\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$	✓ Konstruksie ✓ $\triangle ABC \equiv \triangle DGH$ ✓ S;H;S ✓ $D\hat{G}H = \hat{E}$ ✓ $GH \parallel EF$ & R ✓ R

11.2	In die diagram: • POS is die middellyn van die sirkel met middelpunt O. • QAS en PAR is reguit lyne. • P, Q, R, S en T lê op die omtrek van die sirkel. • $QA = AS$. • $\hat{S}_1 = \hat{S}_2$. • SA verleng ontmoet die sirkel by Q. • QR, PT en ST word getrek.
11.2.1	Skryf, met 'n rede die grootte van $\hat{T}$ neer.
	$\hat{T} = 90^\circ \dots \angle$ in semi-sirkel.



11.2.2	Bewys dat $\triangle PTS \parallel \triangle OAS$.	(4)
	$\hat{A}_2 = 90^\circ \dots$ lyn vanaf middelpunt van sirkel na middelpunt van koord is $\perp$ op koord. In $\triangle PTS$ en $\triangle OAS$: $\hat{T} = \hat{A}_2 = 90^\circ \dots$ bewys $\hat{S}_1 = \hat{S}_2 \dots$ gegee $\therefore \hat{P}_1 = \hat{O}_2 \dots$ binne $\angle$ 'e $\triangle$ 'e $\therefore \triangle PTS \parallel \triangle OAS \dots$ H;H;H	✓ S&R ✓ S&R ✓ S&R ✓ R
11.2.3	Bewys dat $TS \cdot OP = QA \cdot PS$	(4)
	$\frac{TS}{AS} = \frac{PS}{OS} \dots \triangle PTS \parallel \triangle OAS$ Maar $QA = AS \dots$ gegee En $OS = OP \dots$ radii $\therefore \frac{TS}{QA} = \frac{PS}{OP}$ $\therefore TS \cdot OP = QA \cdot PS$	✓ S & R ✓ S ✓ S & R ✓ Verhouding (4)
		[16]
GROOTTOTAAL: [150]		