



eduresourceza.com



GRAAD 12-EKSAMEN
NOVEMBER 2020

GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE: VRAESTEL II
NASIENRIGLYNE

Tyd: 1 uur

100 punte

Hierdie nasienriglyne word voorberei vir gebruik deur eksaminatore en hulpeksaminatore. Daar word van alle nasieners vereis om 'n standaardiseringsvergadering by te woon om te verseker dat die nasienriglyne konsekwent vertolk en toegepas word tydens die nasien van kandidate se skrifte.

Die IEB sal geen gesprek aanknoop of korrespondensie voer oor enige nasienriglyne nie. Daar word toegegee dat verskillende menings rondom sake van beklemtoning of detail in sodanige riglyne mag voorkom. Dit is ook voor die hand liggend dat, sonder die voordeel van bywoning van 'n standaardiseringsvergadering, daar verskillende vertolkings mag wees oor die toepassing van die nasienriglyne.

MODULE 2 STATISTIEK**VRAAG 1**

$$1.1 \quad \frac{\binom{6}{3} + \binom{5}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{14}{3}} = \frac{31}{364} \text{ of } (0,0852)$$

$$1.2 \quad (a) \quad P(X > 3) = \binom{5}{4} (0,7)^4 (0,3) + \binom{5}{5} (0,7)^5 (0,3)^0 = 0,5282$$

$$\begin{aligned} (b) \quad (i) \quad X &\sim N(42; 12,6) \\ P(X \geq 40) &\rightarrow P(X > 39,5) \\ &= P\left(Z > \frac{39,5 - 42}{\sqrt{12,6}}\right) \\ &= P(Z > -0,7) \\ &= 0,5 + 0,2580 \\ &= 0,7580 \end{aligned}$$

(ii) Aangesien $np = 42 > 5$ en $nq = 18 > 5$, kan die normaalbenadering gebruik word.

(iii) Dit maak voorsiening vir simmetrie en nie vir die verdeling om óf positief óf negatief skeef te wees nie.

VRAAG 2

$$\begin{aligned} 2.1 \quad X &\sim N(2\sigma; \sigma^2) \\ P(X > 5,2) &= 0,9 \\ \therefore -1,28 &= \frac{5,2 - 2\sigma}{\sigma} \\ -1,28\sigma &= 5,2 - 2\sigma \\ 0,72\sigma &= 5,2 \\ \therefore \sigma &= 7,22 \Rightarrow \mu = 14,44 \end{aligned}$$

2.2 (a) 'n 94%-vertrouensinterval vir p is:

$$\begin{aligned} 0,2 \pm 1,88 \sqrt{\frac{(0,2)(0,8)}{100}} \\ (0,1248; 0,2752) \end{aligned}$$

(b) As dobbelsteen onsydig is, sal elke waarde 'n waarskynlikheid van 0,1667 hê om gegooi te word. Aangesien 0,1667 binne die vertrouensinterval is, sal die dobbelsteen nie as sydig beskou word nie.

VRAAG 3

3.1 (a) $E[X] = 0,67$

$$\therefore 1(0,35) + 2p + 3q = 0,67$$

$$2p + 3q = 0,32$$

$$p + q + 0,85 = 1$$

$$\therefore p + q = 0,15 \quad \text{en} \quad 2p + 3q = 0,32$$

Los gelyktydig op:

$$p = 0,13 \quad \text{en} \quad q = 0,02$$

(b)
$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= (1)^2(0,35) + (2)^2(0,13) + (3)^2(0,02) - (0,67)^2 \\ &= 0,6011 \\ \sigma_x &= 0,7753 \end{aligned}$$

3.2 $g(x)$ het 'n oppervlakte groter as 1 en $h(x)$ het 'n negatiewe waarskynlikheid.

3.3 (a) X , die mediaan is waar die oppervlakte in die helfte gesny word en aangesien daar 'n veel groter oppervlakte regs van die middel van die x -waardes is, sal die mediaan nader aan 2 wees.

(b) W , aangesien hoër en laer waardes meer waarskynlik is.

(c)
$$P(T < 0,5) = \int_0^{0,5} \left(-\frac{1}{2}x + 1 \right) dx = \frac{7}{16}$$

VRAAG 4

4.1 $H_0 : \mu = 12$

$$H_1 : \mu < 12$$

4.2 Toetsstatistiek:
$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$-1,96 < \frac{11,7 - 12}{\frac{0,5}{\sqrt{n}}} < -1,645$$

$$-1,96 < \sqrt{n} \left(\frac{11,7 - 12}{0,5} \right) < -1,645$$

$$2,742 < \sqrt{n} < 3,267$$

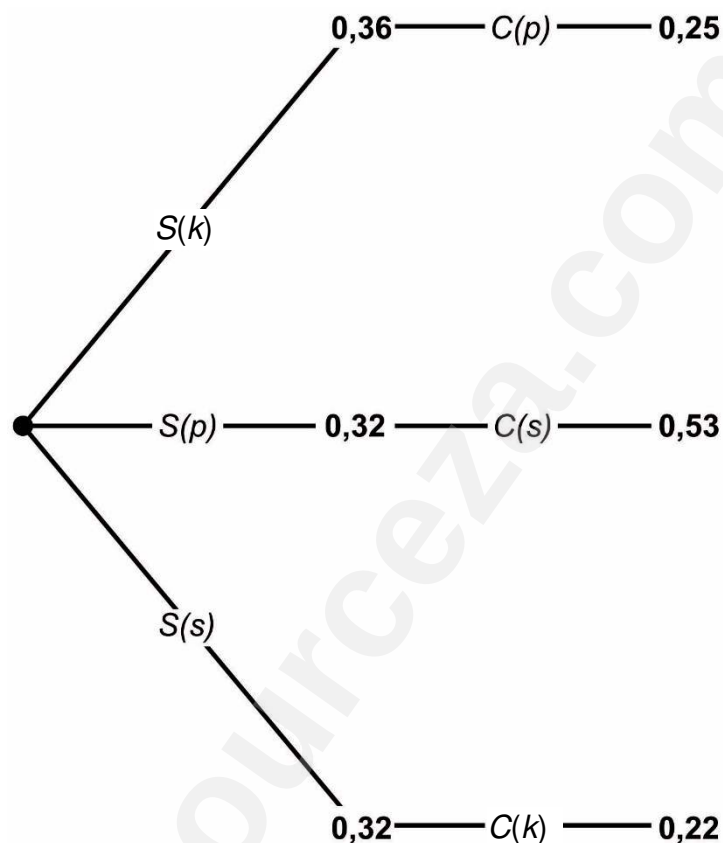
$$7,52 < n < 10,67 ; n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{or } 8 \leq n \leq 10 ; n \in \mathbb{Z}$$

VRAAG 5

$$\begin{aligned}
 5.1 \quad P(\text{Charlie wen}) &= P(R_C)P(S_s) + P(P_C)P(R_s) + P(S_C)P(P_s) \\
 &= (0,22)(0,32) + (0,25)(0,36) + (0,53)(0,32) \\
 &= 0,33
 \end{aligned}$$

OF:



$$5.2 \quad (a) \quad 20 \times 19 \times 18 = 6\,840$$

$$(b) \quad 20^3 - 20 = 7\,980$$

OF

$$\begin{aligned}
 (a) + \text{'n student wen twee pryse} \\
 &= 6\,840 + 3(20 \times 19) \\
 &= 7\,980
 \end{aligned}$$

Totaal vir Module 2: 100 punte

MODULE 3 FINANSIES EN MODELLERING**VRAAG 1**

$$1.1 \quad 0,0775 = \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12} - 1$$

$$r = 0,0749$$

$$F_{37} = \frac{1\,500 \left[\left(1 + \frac{0,0749}{12}\right)^{37} - 1 \right]}{\frac{0,0749}{12}}$$

$$= R62\,214,60 \quad \text{of} \quad R62\,212,31 \text{ (presiese } r)$$

$$= R62\,210 \text{ (naaste 10)}$$

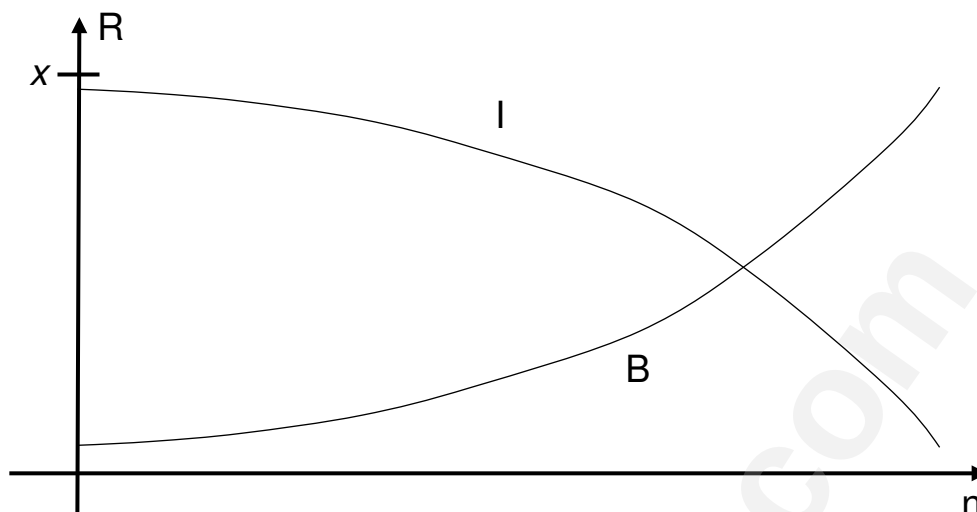
$$1.2 \quad 62\,210 \left(1 + \frac{0,0749}{12}\right)^{48} + \frac{x \left[\left(1 + \frac{0,0749}{12}\right)^{48} - 1 \right]}{\frac{0,0749}{12}} = 206\,530,90$$

$$= R2\,199,75 \quad \text{of} \quad R2\,199,99\dots$$

$$\therefore x = R2\,200 \text{ (naaste rand)}$$

VRAAG 2

2.1



Die bedrag wat vir rente, I , gebruik word, is 'n persentasie van die OB en dus volg dit die algemene vorm van OB . Die waarde van $B = x - I$. Die grafiek van B is dus I in die x -as gereflekteer en met x opgeskuif.

$$2.2 \quad (a) \quad 317\,279,95 = \frac{x \left[1 - \left(1 + \frac{0,1125}{12} \right)^{-132} \right]}{\frac{0,1125}{12}}$$

$$\therefore x = \text{R}4\,200$$

$$(b) \quad P \left(1 + \frac{0,1125}{12} \right)^7 = \frac{4\,200 \left[1 - \left(1 + \frac{0,1125}{12} \right)^{-173} \right]}{\frac{0,1125}{12}}$$

$$\therefore P = \text{R}336\,146,51$$

(c) Reduksie in OB
 $= 336146,51 - 317\,279,95$
 $= R18866,56$

Bedrag betaal
 $= 41 \times 4\,200$
 $= R172\,200$

Rente betaal
 $= 172\,200 - 18866,56$
 $= R153333$

(d) $317\,279,95 \left(1 + \frac{0,1125}{12}\right)^2 = \frac{x \left[1 - \left(1 + \frac{0,1125}{12}\right)^{-130}\right]}{\frac{0,1125}{12}}$
 $= R4\,312,59$

VRAAG 3

3.1 b is die gereelde betaling
 F_0 is die aanvanklike bedrag in die rekening

3.2 $26\,200 = 15\,000a + b \dots\dots (1)$
 $38\,296 = 26\,200a + b \dots\dots (2)$
 $(2) - (1): 12\,096 = 11\,200a$
 $a = 1,08$ en $b = 10\,000$

3.3 $r = 0,08 = 8\%$

VRAAG 4

4.1 Logaritmiese groei

4.2 $0 = -0,0005S + 0,35$
 $s = 700$

4.3 $r = 0,35$

4.4 $S_{n+1} = S_n + 0,35S_n \left(1 - \frac{S_n}{700}\right)$

4.5 8

VRAAG 5

- 5.1 (a) Hierdie term stel die vermindering in die sebrabevolking, per siklus, voor wat deur aanvalle deur leeus veroorsaak word.

- (b) Vir ewewig van leeus:

$$L_E = L_E + f.b.Z_E.L_E - cL_E$$

$$\therefore 0 = L_E(f.b.Z_E - c)$$

$$\therefore Z_E = \frac{c}{f.b}$$

Vir ewewig van sebras:

$$Z_E = Z_E + aZ_E\left(1 - \frac{Z_E}{K}\right) - b.Z_E.L_E$$

$$\therefore 0 = Z_E\left[a\left(1 - \frac{Z_E}{K}\right) - bL_E\right]$$

$$\therefore bL_E = a\left(1 - \frac{Z_E}{K}\right)$$

Vervanging uit bogenoemde:

$$\therefore L_E = \frac{a}{b}\left(1 - \frac{c}{K.f.b}\right)$$

(c) $8 = \frac{0,8}{0,05}\left(1 - \frac{1\,000}{K}\right)$
 $K = 2\,000$

- 5.2 (a) Toename in a impliseer 'n toename in ewewig van roofdier: B.
- (b) Toename in f impliseer 'n toename in roofdier en 'n afname in prooi: C.

VRAAG 6

6.1 $x^2 - 8x + 12 = 0$

$$(x-2)(x-6) = 0$$

$$x = 2 \text{ of } x = 6$$

$$\therefore u_n = A \cdot 2^n + B \cdot 6^n$$

$$-1 = A + B$$

$$6 = 2A + 6B$$

$$3 = A + 3B$$

$$\therefore B = 2 \text{ en } A = -3$$

6.2 $(x-2)(x-3) = 0$

$$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}; \quad u_0 = 8; \quad u_1 = 21$$

Totaal vir Module 3: 100 punte

MODULE 4**MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE****VRAAG 1**

1.1 $8 + 8y + 3x = 38$
 $8y + 3x = 30$ ①

$20 + 4y + x = 46$
 $4y + x = 26$ ②

① $- 2 \times$ ②

$x = -22$ $y = 12$

1.2
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & 1 & 14 \end{array} \right)$$

$2R_3 + 3R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 11 & 55 \end{array} \right)$

$R_3 / 11 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$

$R_2 - 3R_3$
 $R_1 + 4R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$

$x = 10$ $y = -3$ $z = 5$

Ook aanvaar $11z=55$, met $2y + 3z = 9$, $1x - 4z = -10$.

VRAAG 2

$$2.1 \quad (a) \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Slegs antwoord is net $\frac{3}{4}$ maks toegeken.

$$2.2 \quad \begin{pmatrix} \cos 225^\circ & -\sin 225^\circ \\ \sin 225^\circ & \cos 225^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2.3 \quad \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3+4\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{4+3\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$3\cos 2\theta + 4\sin 2\theta = \frac{-3+4\sqrt{3}}{2} \quad \text{en} \quad -\cos 2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^\circ \quad \therefore m = \sqrt{3}$$

VRAAG 3

3.1 (a) Waar

(b) Onwaar, verander teken

(c) Waar

3.2 (a) Ontwikkeling deur 'n ry/kolom wat die meeste nulle het

(b) $p = -2$ $q = 2$

$$(c) \quad -2 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -2[4(2-3) - (3-9) + 2(9-18)] + 2[3(1-4) - 0 + (8-3)] \\ &= -2(-16) + 2(-4) \\ &= 24 \end{aligned}$$

VRAAG 4

4.1 (b) $\frac{n(n-1)}{2}$

4.2 Ja, elke nodus het gelyke grade

4.3 C

4.4 Figuur 1 en Figuur 2

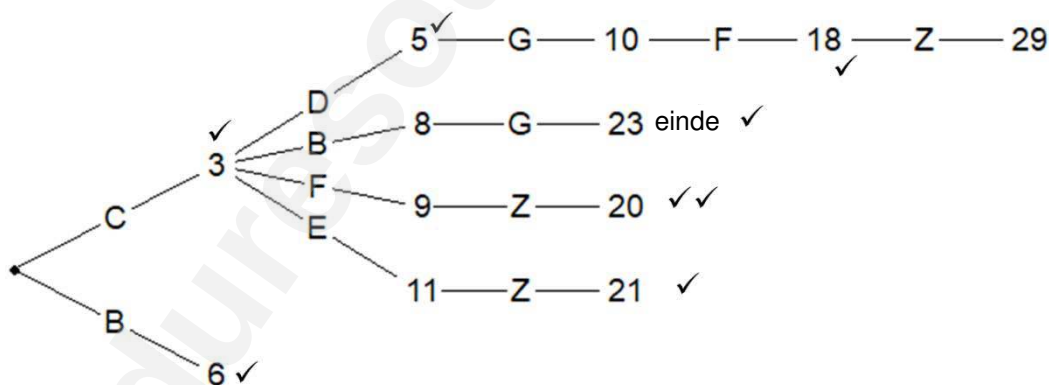
VRAAG 5

5.1 Verwyder nodus D

AC = 3	AC = 3
EF = 3	CBf = 5
CB = 5	cf = 6
CF = 6	fe = 3
FG = 8	fg = 8
EZ = 10	ez = 10
CD = 2	cd+gd = 7

Totaal = 42

5.2



$C \rightarrow F \rightarrow Z = 20$ minute

5.3 $B \rightarrow F \quad 2 < BF \leq 4 \quad ; \quad BF \in \mathbb{Z}$

$\therefore BF = 3$

$BF = 4$

$$A \xrightarrow{6} B \xrightarrow{3} F \xrightarrow{11} Z \quad \therefore 20$$

$$A \xrightarrow{6} B \xrightarrow{4} F \xrightarrow{11} Z \quad \therefore 21$$

Geen verskil nie of redenering gegrond op berekening

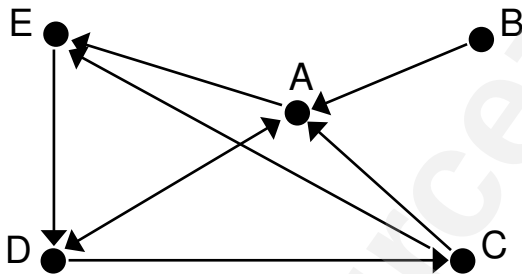
VRAAG 6

6.1

	A	B	C	D	E	
A	0	1	1	0	0	2
B	0	0	1	1	1	3
C	0	1	0	1	0	2
D	0	1	0	0	1	2
E	1	1	1	0	0	3

6.2 B en E

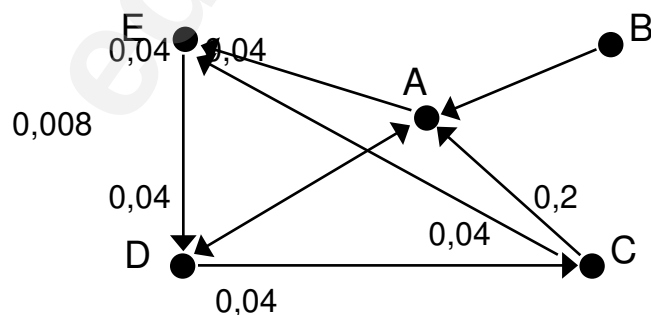
6.3 7 skakels

 A_1 ; B_1 ; C_2 ; D_2 ; E_1 

of

	A	B	C	D	E	
A	-	0	0	1	1	
B	1	-	0	0	0	
C	1	0	-	0	1	
D	1	0	1	-	0	
E	0	0	0	1	-	

6.4 (a)



(b) C en A

Totaal vir Module 4: 100 punte